OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 22 februarie 2015

Clasa a IX- a

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Dacă $a,b>0$, să se demonstreze că $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\le\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$;

b) Dacă $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$ şi $\{b_1,b_2,...,b_n\}=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, să se arate că:

4p) $$\left(a_1+\frac{1}{b_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{b_2}\right)...\left(a_n+\frac{1}{b_n}\right)\le\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)...\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$$

SUBIECTUL II (7p)

Se consideră şirul de numere pozitive $(a_n)_{n\ge1}$ dat prin $a_1=\sqrt{34}$ şi $\sqrt{a_{n+1}^2-33}=2+\sqrt{a_n^2-2n-32}$ pentru $n\ge1$. Dacă $x_n=\left[\frac{4\cdot10^4}{a_n}\right]$, $(")\,n\ge1$ unde prin $[a]$ am notat partea întreagă a numărului *a*, se cere:

2p) a) Demonstraţi că $a_2=\sqrt{2^2+33}$ şi $a_3=\sqrt{3^2+33}$;

3p) b) Determinaţi formula termenului general pentru a_n;

1p) c) Aproximaţi a_{19} cu două zecimale exacte şi apoi calculaţi x_{19};

1p) d) Arătaţi că există un singur număr natural *n* pentru care $x_n=2015$.

SUBIECTUL III (7p)

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D, E, F astfel încât $BD=DE=EF=FC$ iar pe laturile (AB) şi (AC) considerăm punctele M respectiv N. Arătaţi că dreptele MD, AE şi NF sunt concurente dacă şi numai dacă $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\ne\frac{1}{2}$.

(Ion Nedelcu – Gazeta Matematică)

SUBIECTUL IV (7p)

De aceeaşi parte a dreptei AD se construiesc $\square ABD$ şi $\square ACD$ dreptunghice cu ipotenuza (AD). Dacă *G* este centrul de greutate în $\square ABC$, *O* este mijlocul segmentului (AD) iar *N* intersecţia dreptei *OG* cu perpendiculara din *A* pe *BC*, arătaţi că:

3p) a) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OD}$;

2p) b) *N* este ortocentru pentru $\square ABC$;

2p) c) Dacă *P* este ortocentru pentru $\square DBC$, atunci *NPDA* este paralelogram.

NOTĂ: Timp de lucru – **3 ore**